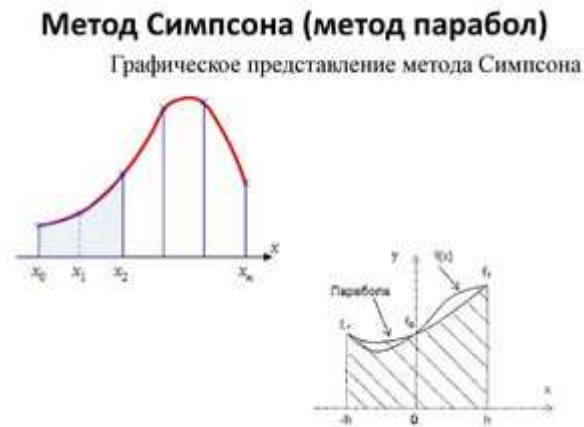


Численное интегрирование методов парабол

Метод парабол (метод Симпсона) — один из наиболее точных методов численного интегрирования. Он основан на аппроксимации подынтегральной функции квадратичной параболой на каждом отрезке интегрирования.



Суть метода

Интервал интегрирования $[a, b]$ разбивается на чётное количество равных отрезков. На каждом таком отрезке подынтегральная функция приближённо заменяется параболой, проходящей через три точки: крайние точки интервала и точку, расположенную посередине.

По этим трём точкам строится интерполяционный многочлен второй степени (парабола). Интеграл от этого многочлена вычисляется с помощью формулы Ньютона-Лейбница.

Формула Симпсона

Если интервал $[a, b]$ разбит на $2n$ равных отрезков, то формула Симпсона имеет вид:

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a)/6n (y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{(2n-1)}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{(2n-2)})),$$

где $y_i = f(x_i)$ — значения подынтегральной функции в точках разбиения.

В случае единичного отрезка формула упрощается до:

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b - a)/6 (f(a) + 4f((a + b)/2) + f(b)),$$

где $f(a)$, $f((a + b)/2)$ и $f(b)$ — значения функции в концах отрезка и в его середине.

Особенности метода

- Требование к чётности числа интервалов. Поскольку парабола проводится через три ординаты на концах двух соседних интервалов, количество интервалов n должно быть чётным.
- Повышенная точность по сравнению с методами прямоугольников и трапеций. Это означает, что для достижения той же точности можно использовать меньшее число отрезков разбиения.
- Точность для многочленов третьей степени. Формула Симпсона даёт точное значение для функций, в которых максимальная степень при x меньше или равна 3, так как в этом случае четвёртая производная равна нулю.

Оценка погрешности

Погрешность метода можно оценить по формуле:

$$|R_n| \leq ((b - a)^5)/(180 \cdot (2n)^4) \cdot M_4,$$

где $M_4 = \max_{a \leq x \leq b} |f^{IV}(x)|$ — максимальная величина четвёртой производной подынтегральной функции на отрезке интегрирования.

Также для оценки погрешности часто используют принцип Рунге. Для этого вычисляют приближённые значения интеграла с разными шагами разбиения (например, n и $2n$) и оценивают погрешность по формуле.

Метод парабол считается одним из наиболее эффективных по соотношению простоты и точности.